

Posudek oponenta habilitační práce

Masarykova univerzita

Fakulta Přírodovědecká fakulta MU
Habilitační obor Matematika-matematická analýza

Uchazeč Sul Khan Mukhigulashvili, Ph.D.

Pracoviště Matematický ústav AV ČR

Habilitační práce On some boundary value problems for functional differential equations

Oponent Dr. András Rontó, CSc.

Pracoviště Matematický ústav AV ČR

Text posudku

Předložená habilitační práce S. Mukhigulashviliho je souhrnem řady výsledků dlouhodobého výzkumu autora v oblasti teorie okrajových úloh a se skládá ze dvou částí.

První kapitola je věnovaná regulárním okrajovým úlohám. Uvažuje se Dirichletova úloha pro nelineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu v tzv. rezonančním případě (t.j. v situaci když lineární část úlohy má netriviální řešení). Zde je potřeba podotknout, že dříve takové úlohy byly studovány pouze v případě když koeficient lineární části je konstantou, která navíc se rovná 1. vlastní hodnotě úlohy. Autor zde, v podstatě, poprvé uvažuje mnohem obecnější případ, když koeficientem lineární části může být libovolná integrovatelná funkce. Byl prozkoumán případ, když netriviální řešení příslušné lineární úlohy nezachovává znaménko, což pro rovnici s konstantním koeficientem lineární části odpovídá situaci, když se ta konstanta liší od 1. vlastní hodnoty. Navíc vzhledem k tomu, že uvedené zde výsledky zahrnují i lineární případ ($f \equiv 0$), dají se tak tlumočit jako rozšíření III. Fredholmovy věty na jistou třídu nelineárních úloh.

Další skupina výsledků se týká periodické úlohy pro lineární funkcionální diferenciální rovnice vyšších řádů. Uvádí se věta, která poskytuje efektivní podmínky postačující pro řešitelnost periodické úlohy v závislosti na normách kladné a záporné částí operátoru. Jsou zde výrazně zobecněny, mimo jiné, známé výsledky Lasoty a Opiala týkající se speciálního případu obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu (rovnice n -ho řádu s neoscilujícím koeficientem neobsahující nižší derivace), navíc jsou konstanty obsazené v podmínkách v jistém smyslu optimální. Zmíněná věta je mimořádně zajímavá a dá se hodnotit, v podstatě, jako konečný výsledek studia daného druhu podmínek řešitelnosti periodické úlohy pro takovéto rovnice.

Druhá kapitola je celá věnována singulárním úlohám. Jsou zkoumány funkcionální diferenciální rovnice 2. a vyšších řádů s časovou singularitou při různých okrajových podmínkách.

V případě dvoubodové úlohy pro lineární singulární funkcionální diferenciální rovnice 2. řádu jsou nalezeny obecné věty popisující přípustné třídy koeficientů rovnice pro které je

studovaná úloha jednoznačně řešitelná. Způsob důkazu je zde založen na metodě horních a dolních funkcí. Jsou dokázány také důsledky poskytující efektivní podmínky řešitelnosti, z nichž některé jsou optimální.

Pro lineární diferenciální rovnice vyššího řádu s deviací argumentu autor zkoumá fokální okrajové úlohy v případě, když koeficienty rovnice mohou mít silnou singularitu. Je to technicky velmi náročná práce, jejíž výsledky jsou efektivní podmínky zaručující Fredholmovu vlastnost úlohy (která v silně singulárních případech nemusí platit) a také efektivní věty o řešitelnosti, čímž se zobecňují výsledky I. Kiguradzeho týkající se silně singulárních obyčejných diferenciálních rovnic. Uvádí se obecné výsledky ohledně řešitelnosti silně singulárních úloh, jež jsou perturbací úlohy s Fredholmovou vlastností. Pro rovnice s deviací argumentu v řadě případů, mimo jiné, jsou nalezeny zajímavé souvislosti mezi „velikostí“ deviací a řešitelností příslušné úlohy. Ohledně této části práce je celkově nutno podotknout, že tematika okrajových úloh pro silně singulární funkcionální diferenciální rovnice je zatím velmi málo studovaná a uvedené výsledky svědčí o tom, že v daném směru učinil autor podstatný pokrok.

V souhrnu se dá říci, že je zde předložena velmi kvalitní práce, která svým významem přesahuje standardní požadavky kladené na habilitační práce v matematickém oboru.

Dotazy oponenta k obhajobě habilitační práce

1. Bylo by teoreticky zajímavé mít k dispozici nějaké vyjádření čísel d_n (str. 11), ze kterého by se dalo odvodit jak se posloupnost chová pro velká n
2. Na str. 9 v (1.2.1) zřejmě chybí index „ i ”

Závěr

Habilitační práce Sulkhana Mukhigulashviliho „On some boundary value problems for functional differential equations” *splňuje* požadavky standardně kladené na habilitační práce v oboru Matematika.

V Brně, dne 19. srpna 2015

Dr. András Rontó, CSc.